Cours

APPLICATIONS LINÉAIRES

1 Applications linéaires, noyau et images

Définitions et premières propriétés

Application linéaire

Soit $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$ une application avec $n, p \in \mathbb{N}^*$.
On appelle **application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$** toute application f telle que $\forall x, y \in \mathbb{K}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

$$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

On note $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$.
Si $n = p$ alors on note $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$.

Remarque

Pour tout $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$, on a :

$$f(0_{\mathbb{K}^n}) = 0_{\mathbb{K}^p}$$

$f(0_{\mathbb{K}^n}) = f(0_{\mathbb{K}^n} + 0_{\mathbb{K}^n}) = f(0_{\mathbb{K}^n}) + f(0_{\mathbb{K}^n}) = 0_{\mathbb{K}^p}$.

Propriété

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^k$ et $x_1 \in \mathbb{K}^n, \ldots, x_k \in \mathbb{K}^n$ avec $k \in \mathbb{N}^*$:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$.
Alors $\forall u_1 \in \mathbb{K}^p, \ldots, u_n \in \mathbb{K}^p$, il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$ telle que :

$$\lambda i[\![1; n]\!], \qquad f(e_i) = u_i$$

Cette application est définie par

$$\forall x \in \mathbb{K}^n, \qquad f(x) = \sum_{i=0}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i \qquad \text{où } x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

Soit $q \in \mathbb{N}^*$.
Soient $g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^q)$ et $f \in (\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$. Alors **l'application composée** $g \circ f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^q)$.

Noyau et image d'une application linéaire

Noyau

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$.
On appelle **noyau** de f le sous-ensemble $\mathbb{K}^n$, noté $Ker(f)$ et défini par :

$$Ker(f) = \{x \in \mathbb{K}^n \mid f(x) = 0_{\mathbb{K}^p}\}$$

Par définition, $Ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Image

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$.
On appelle **image** de f le sous-ensemble de $\mathbb{K}^p$ noté $Im(f)$ défini par :

$$Im(f) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{K}^n\} = \{y \in \mathbb{K}^p \mid \exists x \in \mathbb{K}^n, y = f(x)\}$$

Par définition, $Im(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$

Propriété

IMAGE D'UN APPLICATION LINÉAIRE

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$. Alors, :

$$Im(f) = Vect(f(e_1), \ldots, f(e_n))$$

Attention, ne concluez pas que $\mathcal{F} = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base de $Im(f)$ car la famille $\mathcal{F}$ n'est pas forcément libre !

2 Manipulation d'une application linéaire

Pour cette partie, aucun cours ne sera fournit, toutes les explications seront données pendant les tutorats, ce sera bien plus simple pour comprendre.